

**Marcelina Mocanu**

**ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ**

**Editura ALMA MATER**



**BACĂU, 2015**

## Cuprins

<b>1</b>	<b>Structuri fundamentale</b>	<b>1</b>
1.1	Mulțimi ordonate . . . . .	1
1.1.1	Elemente remarcabile în mulțimi ordonate . . . . .	2
1.1.2	Lanțuri (mulțimi total ordonate) . . . . .	5
1.2	Spații liniare (vectoriale) . . . . .	6
1.2.1	Definiție și consecințe imediate ale definiției unui spațiu liniar . . . . .	6
1.2.2	Subspații liniare într-un spațiu liniar . . . . .	8
1.2.3	Mulțimi liniar independente. Baze algebrice . . . . .	11
1.2.4	Aplicații liniare . . . . .	14
1.2.5	Descompunerea unui spațiu liniar ca sumă directă de subspații liniare . . . . .	22
1.2.6	Spații liniare cât . . . . .	25
1.3	Inegalitățile Hölder și Minkowski . . . . .	27
1.3.1	Inegalitatea lui Young . . . . .	27
1.3.2	Inegalitățile Hölder și Minkowski pentru numere . . . . .	29
1.3.3	Inegalitățile Hölder și Minkowski pentru funcții . . . . .	34
1.4	Spații topologice . . . . .	39
1.4.1	Spațiu topologic. Mulțimi deschise, mulțimi închise . . . . .	39
1.4.2	Familia vecinătăților unui punct. Sistem fundamental de vecinătăți ale unui punct . . . . .	41
1.4.3	Șiruri convergente . . . . .	44
1.4.4	Topologia unui spațiu metric. Topologia unui spațiu normat . . . . .	45
1.4.5	Funcții continue. Homeomorfisme . . . . .	57
1.4.6	Mulțimi compacte . . . . .	60
1.5	Probleme rezolvate . . . . .	66
<b>2</b>	<b>Prelungirea funcționalelor liniare</b>	<b>73</b>
2.1	Funcționale liniare și subspații liniare maximale . . . . .	73
2.1.1	Subspații liniare maximale . . . . .	73

2.1.2	Determinarea funcționalelor liniare . . . . .	75
2.2	Prelungirea aplicațiilor liniare . . . . .	77
2.3	Prelungirea funcționalelor liniare reale. Teorema Hahn-Banach . . .	79
2.3.1	Funcționale convexe. Seminorme . . . . .	79
2.3.2	Teorema Hahn-Banach . . . . .	81
2.4	Prelungirea funcționalelor liniare complexe . . . . .	84
2.5	Probleme rezolvate . . . . .	87
<b>3</b>	<b>Spații liniare topologice</b>	<b>95</b>
3.1	Mulțimi convexe, mulțimi echilibrate, mulțimi absorbante . . . . .	95
3.1.1	Mulțimi convexe . . . . .	95
3.1.2	Mulțimi echilibrate . . . . .	102
3.1.3	Mulțimi absorbante . . . . .	106
3.2	Baloane și seminorme. Funcționala Minkowski a unui balon . . . . .	107
3.2.1	Bilele determinate de o seminormă. Exemple de baloane în spații liniare . . . . .	109
3.2.2	Funcționala Minkowski a unui balon . . . . .	111
3.3	Spații liniare topologice. Definiție și proprietăți generale . . . . .	114
3.3.1	Continuitatea operațiilor de spațiu liniar . . . . .	114
3.3.2	Proprietăți fundamentale ale vecinătăților originii într-un spațiu liniar topologic . . . . .	117
3.3.3	Translații și omotetii în spații liniare topologice . . . . .	119
3.3.4	Continuitatea aplicațiilor liniare între spații liniare topologice	123
3.4	Spații paranormate . . . . .	125
3.5	Probleme rezolvate . . . . .	130
<b>4</b>	<b>Spații local convexe</b>	<b>143</b>
4.1	Definirea unei topologii de spațiu local convex cu ajutorul unei familii de seminorme . . . . .	144
4.2	Familia de seminorme care determină o topologie local convexă dată	149
4.3	Familii remarcabile de seminorme . . . . .	151
4.3.1	Familii suficiente de seminorme . . . . .	151
4.3.2	Familii dirijate de seminorme . . . . .	153
4.4	Spații local convexe metrizable . . . . .	157
4.5	Probleme rezolvate . . . . .	162
<b>5</b>	<b>Spații normate</b>	<b>167</b>
5.1	Definiție. Norme echivalente . . . . .	167
5.1.1	Spații normate. Relații cu alte clase de spații . . . . .	167

5.1.2	Șiruri convergente, șiruri Cauchy în spații normate . . . . .	170
5.1.3	Noțiunea de spațiu Banach . . . . .	171
5.1.4	Norme echivalente. Compararea topologiilor definite de două norme . . . . .	179
5.2	Caracterizări și proprietăți ale aplicațiilor liniare și continue între spații normate . . . . .	183
5.3	Inversarea aplicațiilor liniare între spații normate. Spații normate echivalente . . . . .	186
5.3.1	Condiție necesară și suficientă pentru continuitatea inversei unei aplicații liniare bijective . . . . .	186
5.3.2	Spații normate echivalente . . . . .	187
5.3.3	Spații normate izomorfe (izometric izomorfe) . . . . .	190
5.4	Completarea unui spațiu normat . . . . .	191
5.5	Spațiu normat produs . . . . .	195
5.6	Spații normate de dimensiune algebrică finită . . . . .	201
5.6.1	Consecințe ale echivalenței oricărui spațiu normat finit dimen- sional cu un spațiu de forma $\Gamma^n$ . . . . .	204
5.6.2	Aproximare în spații normate . . . . .	207
5.7	Spații normate separabile. Bază Schauder . . . . .	209
5.7.1	Spațiu normat separabil . . . . .	209
5.7.2	Spații normate cu bază Schauder . . . . .	210
5.8	Spații normate uniform convexe . . . . .	214
5.8.1	Definiție și proprietăți . . . . .	214
5.8.2	Inegalitățile lui Clarkson . . . . .	216
5.9	Probleme rezolvate . . . . .	223
<b>6</b>	<b>Spații normate de aplicații liniare și continue</b>	<b>237</b>
6.1	Norma unei aplicații liniare și continue între spații normate . . . . .	237
6.2	Metode de aflare a normei unei aplicații liniare și continue . . . . .	241
6.3	Convergența în spațiul normat $L(X, Y)$ . . . . .	243
6.4	Spații Banach de aplicații liniare și continue . . . . .	245
6.5	Algebra normată $L(X)$ . . . . .	246
6.6	Probleme rezolvate . . . . .	248
<b>7</b>	<b>Principiile Analizei funcționale</b>	<b>261</b>
7.1	Principiul mărginirii uniforme . . . . .	261
7.1.1	Preliminarii: Spații topologice de categoria a doua . . . . .	261
7.1.2	Principiul mărginirii uniforme . . . . .	263
7.1.3	Teorema Banach-Steinhaus . . . . .	266

7.2	Principiul reprezentărilor deschise . . . . .	268
7.3	Principiul graficului închis . . . . .	273
7.4	Probleme rezolvate . . . . .	275
<b>8</b>	<b>Dualitate in spații normate</b>	<b>281</b>
8.1	Dualul unui spațiu normat . . . . .	281
8.1.1	Introducere . . . . .	281
8.1.2	Existența funcționalelor liniare și continue pe spații normate	284
8.2	Dualele unor spații normate uzuale . . . . .	286
8.2.1	Forma funcționalelor liniare continue pe $\Gamma^n$ . . . . .	286
8.2.2	Forma funcționalelor liniare și continue pe $c$ . . . . .	287
8.2.3	Forma funcționalelor liniare și continue pe $l_p$ . . . . .	290
8.2.4	Forma funcționalelor liniare și continue pe spațiile de funcții $C([a, b])$ și $L^p([a, b])$ . . . . .	294
8.3	Reflexivitate, topologii slabe, operatori adjuncți . . . . .	295
8.3.1	Dualitate . . . . .	295
8.3.2	Reflexivitate . . . . .	297
8.3.3	Topologii slabe . . . . .	306
8.3.4	Adjuncta unei aplicații liniare și continue . . . . .	313
8.4	Probleme rezolvate . . . . .	315
<b>9</b>	<b>Spații Hilbert</b>	<b>323</b>
9.1	Produs scalar. Norma indusă de un produs scalar . . . . .	323
9.1.1	Norma indusă de un produs scalar. Spații prehilbertiene . . .	326
9.2	Ortogonalitate în spații prehilbertiene . . . . .	333
9.2.1	Relația de ortogonalitate a doi vectori . . . . .	333
9.2.2	Mulțime ortogonală. Mulțime ortonormală . . . . .	334
9.3	Descompuneri ortogonale ale unui spațiu Hilbert. Dualul unui spațiu Hilbert. . . . .	341
9.3.1	Complement ortogonal al unei mulțimi . . . . .	341
9.3.2	Descompuneri ortogonale ale unui spațiu Hilbert . . . . .	346
9.3.3	Dualul unui spațiu Hilbert. Teorema lui Riesz . . . . .	349
9.4	Baze ortonormale în spații Hilbert . . . . .	352
9.4.1	Coeficienți Fourier . . . . .	352
9.4.2	Teorema de caracterizare a bazelor ortonormale . . . . .	353
9.5	Izomorfisme de spații Hilbert. Spații Hilbert separabile . . . . .	362
9.6	Probleme rezolvate . . . . .	366

<b>10 Operatori liniari și continui în spații Hilbert</b>	<b>377</b>
10.1 Operatorul adjunct al unui operator liniar și continuu pe un spațiu Hilbert . . . . .	377
10.2 Operatori autoadjuncți, operatori normali, operatori unitari . . . . .	382
10.2.1 Operatori autoadjuncți . . . . .	382
10.2.2 Operatori normali . . . . .	386
10.2.3 Operatori unitari . . . . .	388
10.3 Proiectori . . . . .	392
10.4 Probleme rezolvate . . . . .	394
<b>11 Elemente de teorie spectrală</b>	<b>399</b>
11.1 Valori proprii și vectori proprii ai unui operator liniar . . . . .	400
11.2 Funcția rezolvantă a unui operator liniar și continuu . . . . .	403
11.3 Proprietăți spectrale ale operatorilor compacți . . . . .	413
11.3.1 Operatori compacți pe spații Banach. Definiție, caracterizare, exemple . . . . .	413
11.3.2 Spectrul punctual al unui operator compact . . . . .	418
11.3.3 Alternativa lui Fredholm . . . . .	420
11.4 Proprietăți spectrale ale operatorilor autoadjuncți în spații Hilbert . . . . .	433
11.4.1 Subspații invariante. Proprietăți ale valorilor proprii . . . . .	433
11.4.2 Spectrul unui operator autoadjunct . . . . .	436
11.5 Proprietăți spectrale ale operatorilor autoadjuncți și compacți. Teoremele Hilbert-Schmidt și Hilbert . . . . .	440
11.6 Probleme rezolvate . . . . .	447